

## 基于 Groebner-Sylvester 法的一般 6-6 型 台体并联机构位置正解

黄昔光, 廖启征, 魏世民, 庄育锋, 徐强  
(北京邮电大学自动化学院, 100873, 北京)

**摘要:** 为获得一般 6-6 型台体并联机构位置正解的解析解, 使用分次字典序 Groebner-Sylvester 法的代数方法对该问题进行了研究. 利用计算代数系统计算该机构位置封闭方程的分次字典序 Groebner 基, 从得出的 65 个基中选取 18 个基, 构造 18 阶 Sylvester 结式. 通过分析符号形式方程组的变量次数, 得出位置正解的一元高次方程的次数为 40 且该机构位置正解最多有 40 组解的结论, 其结果与前人的完全一致, 但结式的尺寸却小得多. 研究表明, 该计算方法简洁, 求解速度快, 并从理论上阐明了存在多个不同的结式可以获得该机构的位置正解. 最后, 从给出的数字实例中, 验证了所有解均满足原始方程且无增根, 从而为并联机构位置正解的研究提供了一种有效算法.

**关键词:** 并联机构; 位置正解; Sylvester 结式

**中图分类号:** TH113.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2008)03-0300-04

## Forward Kinematics of General 6-6 Stewart Mechanisms Based on Groebner-Sylvester Approach

HUANG Xiguang, LIAO Qizheng, WEI Shimin, ZHUANG Yufeng, XU Qiang  
(Automation School, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract:** To obtain the closed-form solutions of forward kinematics of a general 6-6 Stewart mechanism, the Groebner-Sylvester hybrid approach is presented. The reduced Groebner basis under degree lexicographic ordering for the closed-form equations is evaluated with computer algebra. Selecting 18 Groebner basis from 65 ones, an  $18 \times 18$  Sylvester matrix can be constructed, which is relatively small in size. A 40th degree univariate equation is achieved from the determinant of the matrix. The proposed algorithm operates simply and rapidly to lead to the same univariate equation via various resultants. It is verified by a numerical example that the obtained roots satisfy the original equations.

**Keywords:** parallel mechanism; forward kinematics; Sylvester resultant

并联机构位置正解就是根据给定并联机器人的 6 条并联的杆长, 来确定末端动平台的姿态参数. 一般 6-6 型台体并联机构位置的正解是继空间 6R 串联机械手位移分析完成后的又一机构学难题<sup>[1]</sup>, 各国学者对此进行了大量研究<sup>[2-9]</sup>. Wam-

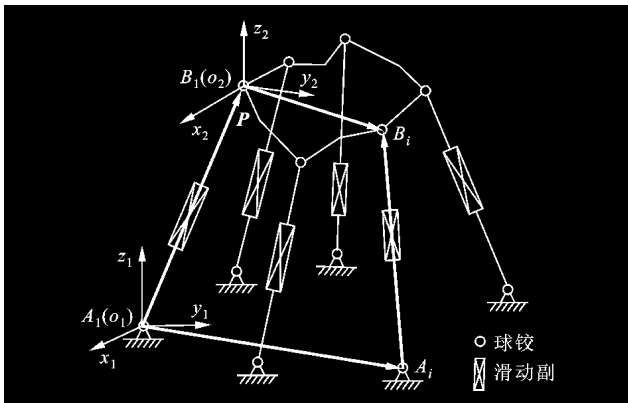
pler<sup>[2]</sup> 和 Raghavan<sup>[3]</sup> 运用同伦连续法数字化证明了该并联机构的位置正解有 40 组解. Innocenti 和 Castelli<sup>[4]</sup> 用一维搜索的方法求解该机构位置正解的全部实数解, 但计算量非常大. 刘安心等<sup>[5]</sup> 应用四元齐次化法以及系数同伦连续法求出了全部 40 组

的位置正解. Innocenti<sup>[6]</sup>通过构造 2 个  $45 \times 45$  的 Sylvester 结式,提取最大公因式,从而得到该机构位置正解的一元 40 次方程. Lee<sup>[7]</sup>给出了一种位置正解代数法,从符号形式上看,构造的 28 阶单变量系数行列式的最高次数为 41,而展开后获得的一元高次方程为 40 次,故其求解是数值计算的结果,而非符号运算结果. Dhinra 等<sup>[8]</sup>通过求解 19 个封闭方程的字典序 Groebner 基,利用 68 个基构造了 68 阶 Sylvester 结式,获得了一元 40 次方程,但其计算效率不高且计算时间较长.

本文使用分次字典序 Groebner-Sylvester 法的代数方法研究了一般 6-6 型台体并联机构位置的正解问题,与文献[8]相比,本文将 Sylvester 结式由原来的 68 阶降低到 18 阶,大大提高了计算效率,缩短了计算时间.通过分析符号形式方程的组变量次数,得出该机构位置正解一元高次方程的次数为 40,且该机构的位置正解最多有 40 组解的结论.同时,通过改变单项式的分次字典序,从理论上阐明了存在多个不同的结式可以获得该机构的位置正解.由于采用符号和有理数相结合的运算,不存在精度损失,因此属于准确计算,算例也表明该算法简洁,运算速度较快.

## 1 数学建模

图 1 中的上、下平台由 6 条支链采用球铰及滑动副相连,在上、下台体中,分别建立与之固定的动坐标系  $o_2x_2y_2z_2$ 、定坐标系  $o_1x_1y_1z_1$ .  $A_i$  和  $B_i$  在动、定坐标系的坐标分别为  $Q_{ia}(a_{xi}, a_{yi}, a_{zi})$  和  $Q_{ib}(b_{xi}, b_{yi}, b_{zi})$ ,  $A_iB_i$  的长度为  $L_i$ . 因此,只需求出  $o_2x_2y_2z_2$  到  $o_1x_1y_1z_1$  的旋转变换矩阵  $R$  和平移矢量  $P(x, y, z)$ , 就可以确定上平台的空间位姿.



$A_i, B_i (i=1, 2, \dots, 6)$ : 分别表示上、下平台的 6 个球铰的球心

图 1 一般 6-6 型台体并联机构

根据空间矢量关系得

$$Q_{ib}Q_{ia} = RQ_{ib} + P - Q_{ia} \quad i = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (1)$$

其中

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}$$

由杆长约束条件得

$$L_i^2 = [RQ_{ib} + P - Q_{ia}]^T [RQ_{ib} + P - Q_{ia}] \quad i = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (2)$$

$$L_i^2 = P^T P \quad i = 1 \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),展开得

$$Q_{ib}^T Q_{ib} + L_1^2 - L_i^2 + Q_{ia}^T Q_{ia} + 2P^T R Q_{ib} - 2Q_{ia}^T P - 2Q_{ib}^T R Q_{ia} = 0 \quad i = 2, 3, 4, 5, 6 \quad (4)$$

由于  $R$  是单位正交的,因此

$$r_i^2 + r_{i+3}^2 + r_{i+6}^2 - 1 = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

$$r_1 r_2 + r_4 r_5 + r_7 r_8 = 0 \quad (6)$$

$$r_1 r_3 + r_4 r_6 + r_7 r_9 = 0 \quad (7)$$

$$r_2 r_3 + r_5 r_6 + r_8 r_9 = 0 \quad (8)$$

$$r_2 r_6 - r_3 r_5 - r_7 = 0 \quad (9)$$

$$r_3 r_4 - r_1 r_6 - r_8 = 0 \quad (10)$$

$$r_1 r_5 - r_2 r_4 - r_9 = 0 \quad (11)$$

式(3)~式(11)共含有 12 个未知量( $r_1 \sim r_9, x, y$  和  $z$ ). 实际上,只需式(3)、式(4)以及式(5)~式(11)中的任意 6 个方程,就可以求解出这 12 个未知量,即式(5)~式(11)中有 3 个方程与其他 6 个方程是相关的. 但是,相关方程有助于提高分次字典序 Groebner 基的求解效率,故对式(3)~式(11)进行运算.

## 2 分次字典序 Groebner 基法求解

Groebner 基法的基本思想是在原非线性多项式系统所构成的多项式环内,通过对变量多项式的适当排序,求多项式的 S-多项式并进行约简和消元,最后生成一个与原系统完全等价且便于直接求解的三角化标准基. Bucherberg 算法是构造多项式系统 Groebner 基的一种有效算法,该算法的核心包括排序、生成 S-多项式和约简,当消元过程中方程组的所有多项式对 S-多项式约简皆为 0 时,即得到与原方程组等价的 Groebner 基. 本文运用计算机代数系统 Mathematica 软件中提供的 GroebnerBasis 命令对式(3)~式(11)进行求解.

### 2.1 求解分次字典序 Groebner 基

直接运用计算机代数系统 Mathematica 软件中

提供的 GroebnerBasis 命令,以  $x, y, z, r_1 \sim r_9$  为变量,按照单项式的分次字典序排列: $x > y > z > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > r_5 > r_6 > r_7 > r_8 > r_9$ , 计算式(3)~式(11)的分次字典序 Groebner 基,得到 65 个含有 105 个幂积项的多项式方程,由于篇幅限制,在此不予写出。

选取其中不含变量  $x, y$  的第 40、41、42、43、44、45、46、47、25、57、58、59、60、61、62、63、64、65 项,共 18 个多项式方程,并将  $r_9$  作为压缩变量,可以得到 18 个含有 18 个幂积项的多项式,其中幂积项为

$$[1, z_1, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_6^2, r_7, r_8, z_1 r_8, r_1 r_8, r_2 r_8, r_4 r_8, r_5 r_8, r_7 r_8, r_8^2]$$

根据 Groebne 基理论,当单项式的序确定后,其相应的 Groebner 基是惟一的,对于不同的单项式序,可以得到不同的 Groebner 基. 尝试对不同的变量排序进行 Groebner 基分次字典序求解,得到了不同的 Groebner 基,数量也不相同,但总可以找到 18 个多项式方程,构造结式且都能获得正确的结果. 因此,存在多个不同的结式,都可以获得与 6-6 型台体并联机构相同的全部位置正解。

## 2.2 一元高次输入输出方程

将  $r_9$  作为压缩变量,将 18 个多项式方程看作关于  $1, z_1, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_6^2, r_7, r_8, z_1 r_8, r_1 r_8, r_2 r_8, r_4 r_8, r_5 r_8, r_7 r_8, r_8^2$  为假想变元的线性方程组,写成矩阵形式为

$$\mathbf{M}_{18 \times 18} \mathbf{T} = 0 \quad (12)$$

式中: $\mathbf{M}_{18 \times 18}$  是一个关于  $r_9$  的 18 阶单变量系数矩阵; $\mathbf{T}$  是一个含有 18 个假想变元的列矩阵,即

$$\mathbf{T} = [1, z_1, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_6^2, r_7, r_8, z_1 r_8, r_1 r_8, r_2 r_8, r_4 r_8, r_5 r_8, r_7 r_8, r_8^2]^T$$

根据代数学,挑选出来的 18 个多项式方程有解的条件是其系数行列式等于 0,即

$$\det(\mathbf{M}_{18 \times 18}) = 0 \quad (13)$$

$\mathbf{M}_{18 \times 18}$  中每列关于  $r_9$  的最高次数分别为:5,3,3,3,3,3,3,3,1,3,3,1,1,1,1,1,1,1,它们的总和为 40. 可知,展开式(13)后得到只含变量  $r_9$  的多项式的最高次数不会超过 40.

根据式(13),不需要提取任何公因式,直接可以得到关于变量  $r_9$  的一元 40 次输入输出方程为

$$\sum_{i=0}^{40} s_i r_9^i = 0 \quad (14)$$

式中: $s_i$  是由输入参数确定的实系数。

由以上分析可知,本文构造的 18 阶单变量系数行列式与展开系数行列式后获得的一元多项式,在符号形式上的最高次数是完全一致的,求解式(14),将得到 40 个复数解。

## 2.3 其他变量的求解

将求得的  $r_9$  代入所选择的 18 个多项式方程中的任何 17 个关系式中,则这 17 个式子变成除假变元 1 之外的 17 个假想变元的线性方程组,解此方程组,可求得对应于  $r_9$  的  $z, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8$  的值。

将所求得的  $z, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9$  值代入分次字典序 Groebner 基中的第 1、2 个基中,很容易求得对应的  $x, y$  的值. 其中,  $z, r_3, r_6$  变量分别取一正一负 2 个解,即对应于每一个  $r_5$  的值将产生 2 组位置正解,共计 40 组解。

## 3 数字实例

输入表 1 已知参数,求 6-6 型台体并联机构的位置正解. 按照式(1)~式(14)的步骤,得到全部 40 组位置正解的复数解,其中实数解 10 组,如表 2 所示. 经验证,全部 40 组解都满足原方程,即无增根。

表 1 数字实例的已知参数

| $i$ | $a_{ii}$ | $a_{ji}$  | $a_{zi}$ | $b_{xi}$ | $b_{yi}$ | $b_{zi}$ | $L_i$ |
|-----|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| 1   | 0        | 0         | 0        | 0        | 0        | 0        | 20    |
| 2   | 1173/100 | 680/100   | 497/100  | 210/100  | 213/100  | 11/100   | 19    |
| 3   | 1886/100 | 415/100   | 299/100  | 816/100  | -295/100 | -390/100 | 18    |
| 4   | 1988/100 | -1178/100 | -110/100 | 907/100  | -592/100 | 195/100  | 23    |
| 5   | 1276/100 | -1776/100 | 96/100   | 4/100    | -989/100 | -401/100 | 21    |
| 6   | 69/100   | -887/100  | 95/100   | 202/100  | -789/100 | 106/100  | 19    |

表2 数字实例的 10 组实数位置正解

| 编号 | $x$      | $y$       | $z$       | $r_1$    | $r_2$    | $r_3$    | $r_4$    | $r_5$    | $r_6$    | $r_7$    | $r_8$    | $r_9$    |
|----|----------|-----------|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1  | -0.975 1 | -1.077 9  | 19.947 1  | 0.902 4  | -0.205 4 | 0.378 9  | 0.206 6  | 0.977 7  | 0.038 1  | -0.378 3 | 0.043 9  | 0.924 7  |
| 2  | 14.510 1 | -9.162 7  | 10.271 3  | -0.965 6 | 0.024 5  | 0.259 0  | -0.100 1 | -0.953 8 | -0.283 3 | 0.240 1  | -0.299 5 | 0.923 4  |
| 3  | -1.235 0 | 0.387 1   | 19.958 1  | 0.705 7  | -0.457 2 | 0.541 2  | 0.390 2  | 0.888 4  | 0.241 70 | -0.591 3 | 0.040 6  | 0.805 4  |
| 4  | 11.021 5 | -6.620 6  | 15.319 7  | 0.370 0  | -0.241 2 | 0.897 2  | 0.623 5  | -0.651 5 | -0.432 3 | 0.688 7  | 0.719 3  | -0.090 7 |
| 5  | 5.654 3  | -2.064 6  | 19.072 7  | -0.549 2 | -0.688 6 | -0.473 6 | -0.125 3 | -0.492 5 | 0.861 3  | -0.826 3 | 0.532 3  | 0.184 1  |
| 6  | 12.291 4 | 9.614 0   | -12.509 7 | -0.980 8 | -0.184 2 | 0.064 1  | -0.194 2 | 0.892 5  | -0.407 1 | 0.017 7  | -0.411 7 | -0.911 1 |
| 7  | 12.839 6 | -12.003 4 | 9.542 7   | -0.961 9 | 0.042 2  | -0.270 1 | 0.254 8  | -0.219 7 | -0.941 7 | -0.099 1 | -0.974 7 | 0.200 6  |
| 8  | 17.421 6 | -2.468 5  | -9.507 7  | 0.145 2  | 0.929 1  | 0.340 3  | 0.635 1  | 0.176 2  | -0.752 0 | -0.758 6 | 0.325 3  | -0.564 5 |
| 9  | 6.798 4  | -1.523 1  | 18.747 3  | 0.787 3  | -0.615 1 | 0.043 7  | 0.160 0  | 0.135 4  | -0.977 8 | 0.595 5  | 0.776 8  | 0.205 0  |
| 10 | 9.254 6  | -13.765 6 | 11.174 2  | 0.280 8  | 0.280 4  | -0.917 9 | 0.950 7  | 0.050 3  | 0.306 1  | 0.132 0  | -0.958 6 | -0.252 5 |

## 4 结 论

(1) 本文使用分次字典序 Groebner-Sylvester 法的代数方法,研究了一般 6-6 型台体并联机构位置正解的问题.与一般的消元法相比,该方法没有复杂的数学推导,计算方法简洁,构造的 18 阶 Sylvester 结式尺寸比较小,因此求解效率较高.通过分析符号形式的方程组,得出该一元高次方程的次数为 40 且该机构位置正解最多有 40 组解的结论.

(2) 通过改变单项式的分次字典序,得出存在多个不同的结式都可以获得该机构的位置正解的结论.同时,在整个运算过程中,采用符号和有理数相结合的运算,只是在数字类型转换和简化时才会引入可以控制的误差,因此计算精度可以得到保证.

(3) 由于计算机硬件条件的限制,在求解分次字典序 Groebner 基时,将符号运算转换为有理数进行运算,有助于减少求解时间,因此提高了计算效率.

### 参考文献:

- [1] 文福安,梁崇高,廖启征. 并联机器人机构位置正解[J]. 中国机械工程,1999,10(9):1011-1013.  
WEN Fuan, LIANG Chonggao, LIAO Qizheng. The forward displacement analysis of parallel robotic mechanisms [J]. China Mechanical Engineering, 1999, 10 (9):1011-1013.
- [2] WAMPLER C W. Forward displacement analysis of general six-in-parallel SPS (Stewart) platform manipulators using SOMA coordinates [J]. Mech Mach Theory, 1995, 31(3): 331-337.
- [3] RAGHAVAN M. The Stewart platform of general ge-

ometry has 40 configurations [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1993, 115(2):277-281.

- [4] INNOCENTI C, CASTELLI V P. Forward kinematics of the general 6-6 fully parallel mechanism: an exhaustive numerical approach via a mono-dimensional-search algorithm [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1993, 115(4):932-937.
- [5] 刘安心,杨廷力. 求一般 6-SPS 并联机器人机构的全部位置正解 [J]. 机械科学与技术, 1996, 15(4):543-546.  
LIU Anxin, YANG Tingli. Finding all solutions to forward displacement analysis problem of 6-6 SPS parallel robot mechanism [J]. Mechanical Science and Technology, 1996, 15(4):543-546.
- [6] INNOCENTI C. Forward kinematics in polynomial form of the general Stewart platform [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2001, 123(2):254-260.
- [7] LEE Taeyoung, SHIM Jaekyung. Forward kinematics of the general 6-6 Stewart platform using algebraic elimination [J]. Mech Mach Theory, 2001, 36(4):1073-1085.
- [8] DHINGRA A K, ALMADI A N, KOHLI D. A Groebner-Sylvester hybrid method for closed-form displacement analysis of mechanisms [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2000, 122(4):431-438.
- [9] 姜虹,郑康平,王军,等. 一种高效虚拟轴机床的位置正解[J]. 西安交通大学学报, 2002, 36(11):1187-1190.  
JIANG Hong, ZHENG Kangping, WANG Jun, et al. Effective method of forward displacement analysis for virtual axis machine tool [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2002, 36(11):1187-1190.

(编辑 管咏梅)